Mathematik II

Integralrechnung für Funktionen einer Variable

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \text{Fläche unter der Funktion}$$

$y = f(x)$ stetig in $[a,b] \Rightarrow$ integrierbar

- linearität:

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x))\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx$$

- additivität:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \text{bei } a<c<b$$

$$\Rightarrow \int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

Unbestimmtes Integral

$$I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Stammfunktion

zu $y = f(x)$

$$F'(x) = f(x) \qquad \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + C \text{ (additive Konstante)}$$

$$\Rightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c$$

Partielle Integration

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx$$

Substitution

$$\int_a^b f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

bei bestimmt: änderung von a,b
bei unbestimmt: rücksubstitutio

Uneigentliche Integrale

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

falls der GW existiert, konvergiert das UE, sonst heisst es divergent

$$\int_a^{b^-} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$

$$\int_{a^+}^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^b f(x)\,dx$$

Integralrechnung für Funktionen zweier Variablen

Doppelintegral und Volumen

$$V = \int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$ mit $a\le x\le b,\ c\le y\le d$

$\Rightarrow$ inneres und äusseres Integral

$$V = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

$\Rightarrow$ Integrations reihenfolge EGAL!

$$V = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx$$

Integrand in Produktform

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$$

$$V = \int_c^d \int_a^b f_1(x) \cdot f_2(y)\,dx\,dy = \int_c^d f_2(y) \left(\int_a^b f_1(x)\,dx \right) dy =$$

$$= \int_c^d f_2(y)\,dy \cdot \int_a^b f_1(x)\,dx = F_1(x)\Big|_a^b \cdot F_2(y)\Big|_c^d$$

Vektorrechnung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

- Norm (Betrag, Länge): $\|\vec{v}\| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \quad \left(= \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} \right)$
- Skalarmultiplikation: $\lambda \vec{v} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda \dots \\ \lambda v_n \end{pmatrix}$
- Addition: $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ \dots + \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$
- Subtraktion analog
- Linearkombination: $\vec{w} = \lambda_1 \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \vec{v}_k$
- Skalarprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{u} = v_1 u_1 + \dots + v_n u_n$
- Orthogonalität: $\vec{v} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow$ Senkrecht zueinander
- Lineare Abhängigkeit: falls sich einer der Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ als Linearkombination der Restlichen darstellen lässt.

- "mehr Vektoren als Dimensionen": n-dim Raum > K Vektoren
  $\Rightarrow$ immer linear abhängig
- Basis: n Vektoren $\vec{b}_1, ..., \vec{b}_n$ bilden die Basis eines n-dim Raums, wenn sie linear unabhängig sind
- Einheitsvektoren: Basis des $\mathbb{R}^n$ $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, ...$
  $\Rightarrow$ Kanonische Basis
- Erzeugendensystem: Jeder Vektor $\vec{w} \in \mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination der K Vektoren $v_1, ..., v_K$ geschrieben wer
  $\Rightarrow$ Jedes EZS hat eine Basis, $K \geq n$ gilt immer
  "mindestens so viele Vektoren als Dimensionen"
  $\Rightarrow$ eine Basis ist ein EZS aus linear unabhängigen Vektoren, "minimales EZS"

Unterräume

Die Menge $W = \{ \lambda_1 \vec{v}_1 + ... + \lambda_K \vec{v}_K : \lambda_1, ..., \lambda_K \in \mathbb{R} \}$ aller möglich Linearkombinationen ist der Unterraum.

→ Unterräume sind bzgl. der Addition abgeschlossen

→ Unterräume sind bzgl. der Skalar Multiplikation abgeschloss

→ $\{ \vec{v}_1, ..., \vec{v}_K \}$ ist ein EZS des Unterraums

→ $\underbrace{\{ \vec{b}_1, ..., \vec{b}_d \}}_{d = \text{Dimension}}$ Basis genau dann, wenn linear unabhängig und EZS des Unterraums

→ Unterräume mit $d=1$: Geraden

$d=2$: Ebenen

$d=n-1$: Hyperebenen

$d=0 \Rightarrow \{ \vec{0} \}$ $\qquad d=n \Rightarrow \mathbb{R}^n$

Matrixrechnung

$m \times n$ Matrix: $A_{m\times n} = (a_{ij})$

m Zeilen (rows), n Spalten (columns)

$(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ $i = 1, \dots, m$ Zeilenvektor

$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $j = 1, \dots, n$ Spaltenvektor

- transponierte Matrix: $A^T_{n\times m}$, vertauschen von Zeilen und Spalt
- Skalar Multiplikation: $\lambda A_{m\times n}$, λ multipliziert jedes Element
- Addition: $A_{m\times n} + B_{m\times n}$, Addition jedes Elements
  Subtraktion analog
- Multiplikation: $A_{m\times n} \cdot B_{n\times p}$, Spalten $A ==$ Zeilen B
  resultiert in $C_{m\times p}$: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$

  $\Rightarrow$ Matrixmultiplikation ist nicht Kommutativ!

  $$A \cdot B \neq B \cdot A$$

- lineare Zuordnung: $\vec{v} \in \mathbb{R}^n \rightarrow \vec{u} = A\vec{v} \in \mathbb{R}^m$
  $A_{m\times n}$ mit Vektor $n\times 1$ $\rightarrow$ neuer Vektor $m \times 1$

- Einheitsmatrix: neutrales Element der Matrix Multiplikation

  $$A \cdot I_n = A = I_n \cdot A$$

  $\Rightarrow I_n$ Matrix mit lauter 1 auf der Diagonalen

  $$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ zb.}$$

  $\Rightarrow \lambda I_n$ streckt einen Matrix um Faktor λ

  $$A \cdot 2 I_n = 2A = 2 I_n \cdot A$$

Determinante

M_n, quadratische Matrizen, $n \times n$ Matrizen

det(A) ordnet jeder M_n Matrix das n-Dimensionale Volumen des Aufgespannten Gebildes zu.

$$\det(A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\det(A_3) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

bei $n>3$, Zeilen- oder Spaltenentwicklung

$\Rightarrow$ Minorante, $A \in M_{n-1}$ $\Rightarrow$ mit den meisten Nullen am einfachsten!

- $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- $\det(A^T) = \det(A)$
- falls eine Zeile (oder Spalte) nur Nullen hat, $\det(A) = 0$
- falls zwei Zeilen (oder Spalten) identisch sind, $\det(A) = 0$
- falls allgemeiner die Zeilen (oder Spalten) linear abhängig sind, $\det(A) = 0$

  $\Rightarrow \det(A) = 0$ impliziert also lineare Abhängigkeit!
- falls ein Vielfaches einer Zeile (oder Spalte) zu einer andere Zeile (oder Spalte) addiert wird, verändert sich det(A) nicht
- das Vertauschen zweier Zeilen (oder Spalten) ändert das Vorzei
- bei Multiplikation einer Zeile (oder Spalte) mit λ, multipliziert sich det(A) ebenfalls mit λ

$\Rightarrow$ det(A) mit A Dreiecksmatrix (lauter Nullen unter der Diag ist gleich dem Produkt der Diagonal-Elementen

Inverse

X Inverse zu A, wenn: $A \cdot X = I_n = X \cdot A$
X geschrieben als A^{-1}

$$\det(A^{-1} A) = \det(A^{-1}) \cdot \det(A) = \det(I_n) = 1$$

$$\Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

also muss $\det(A) \neq 0$ sein, damit A invertierbar

$$A_2^{-1} = \frac{1}{\det(A_2)} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

bei $n \geq 3$, Gauss-Algorithmus

Rechenregeln

$(A^T)^T = A$ $\qquad (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

$(A^{-1})^{-1} = A$ $\qquad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

$$(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$$

Definitionen

- symmetrisch, falls $A^T = A$
- schiefsymmetrisch, falls $A^T = -A$
- orthogonal, falls $A^T = A^{-1}$ (und invertierbar)

Rang

Zeilenrang $\text{rang}_Z A$

Spaltenrang $\text{rang}_S A$ $\Rightarrow$ Anzahl linear unabhängigen Zeilen in A bzw. Spalten

$\Rightarrow$ für jede $m \times n$ Matrix gilt:

$\text{rang}_Z A = \text{rang}_S A \Rightarrow \text{rang } A$

Elementare Umformungen einer Matrix:

1. Addition eines Vielfaches einer Z/S zu einer anderen Z/S
2. Vertauschen zweier Z/S
3. Multiplikation einer Z/S mit $\lambda \neq 0$

$\Rightarrow$ der Rang ändert sich bei Elementare Umformungen ni

$\Rightarrow$ A zu A^* in Trapezform, dann einfach ablesen, da:
der Rang einer Matrix in Trapezform gegeben ist
durch die Anzahl Zeilen, die nicht nur Nullen enthalten

$\rightarrow$ bei quadratischen Matrizen:

- falls $\text{rang } A_n = n$, regulär ("vollem Rang")
- falls $\text{rang } A_n < n$, singulär

A_n regulär $\Leftrightarrow \text{rang } A_n = n \Leftrightarrow \det(A_n) \neq 0 \Leftrightarrow A_n$ invertier

$\Rightarrow$ bei mehreren n Vektoren, genau dann linear unabhängig:

$A_n = (v_1 | v_2 | v_3)$ $\text{rang } A_n = n$, oder $\det(A_n) \neq 0$

$\Rightarrow$ also Basis des $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ Dimension und Basis eines aufgespannten Unterraums:

dim = Rang(A)

Basis = d linear unabhängige Vektoren in A

Lineare Gleichungssysteme

Existenz und EindeutigkeitsKriterien

lineares Gleichungssystem (LGS), m Gleichungen, n Unbekannten

$\Rightarrow$ Matrixform: $A\vec{x}=\vec{b}$ — A: $m \times n$-Koeffizienten Matrix

$\vec{x}$: Lösungsvektor

$A, \vec{b}$ müssen bekannt sein! — $\vec{b}$: "rechte Seite" Vektor

Existenz einer Lösung

- ein homogenes LGS $A\vec{x}=\vec{0}$ hat immer mindestens die triviale Lösung $\vec{x}=\vec{0}$, also immer lösbar
- ein inhomogenes LGS $A\vec{x}=\vec{b}$ mit $\vec{b}\neq\vec{0}$, besitzt nur eine Lösung, wenn $\vec{b}$ sich als LinearKombination der SpaltenVektoren von A darstellen lasst

$\Rightarrow$ $\vec{b}$ und Spalten A müssen linear abhängig sein

$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) = \text{rang}(A)$ — Existenzkriterium

Eindeutigkeit einer Lösung

Wenn die n Spaltenvektoren von A linear unabhängig sind, gibt es nur eine Lösung:

$\Rightarrow \text{rang}(A|\vec{b}) = \text{rang}(A) = n$ — EindeutigkeitsKriterium

bei $r<n$, gibt es $n-r$ freie Unbekannte

($(n-r)$-dimensionaler Lösungsraum)

Quadratische LGS

A ist quadratisch

- falls A regulär, $\text{rang}(A) = n$ (oder $\det(A) \neq 0$), genügt A dem Existenz- und Eindeutigkeitskriterium

$\Rightarrow$ ein LGS mit quadratischer, regulärer KoeffizientenMatrix A besitzt eine Lösung: $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$

Gaussscher Algorithmus

auch Gausssches Eliminationsverfahren

$\Rightarrow$ systematische Elimination über elementare Umformun
  - $\rightarrow$ bis Trapez- oder Dreiecksform
  - $\rightarrow$ Rückwärtseinsetzen, $n-r$ frei wählbar

$\Rightarrow$ falls $a_{xy} \neq 0$, Eliminierung von x_x durch:

$$(\text{neue } i\text{-te Zeile}) = (\text{alte } i\text{te Zeile}) - \frac{a_{xx}}{a_{xy}} \cdot (\text{erste Zeile})$$

bei Erster Zeile, für $i = 2, \ldots, m$

falls $a_{xy} = 0$, Vertauschen der Zeile mit einer weiter unten liegende

$\Rightarrow$ ist die Lösungsmenge der Struktur:

$$\vec{x} = \vec{x}_i + \vec{x}_h$$

(bei LGS mit unendlic vielen Lösungen)

inhomogene Gleichung: $A\vec{x}_i = \vec{b}$

homogene Gleichung: $A\vec{x}_h = \vec{0}$

Berechnung der Inversen mit Gauss

die $n \times 2n$ Matrix $(A|I_n)$ wird aufgestellt und durch Anwendung von Gauss in die Form $(I_n|X)$ überführt, X ist dann A^{-1}, wobei I_n immer die Einheitsmatrix ist! $(A|I_n) \Rightarrow (I_n|A^{-1})$

Lineare Abbildungen

$$A_{m\times n}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$\vec{v} \to A_{m\times n}\vec{v}$$
lineare Abbildung

Inputvektor $\vec{v}$ zu Outputvektor $\vec{u} = A\vec{v}$ $\Rightarrow$ Abbildung

linear $\Rightarrow$ $A(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = A\vec{v}_1 + A\vec{v}_2$

$A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v})$

$\vec{e}_j$, $j = 1, .., n$ Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^n$

$\vec{u}_j$, $j = 1, ..., n$ Spaltenvektoren von A

$\Rightarrow A\vec{e}_j = \vec{u}_j$, der j-te Spaltenvektor ist das Abbild des j-ten Einheitsvektor mit A.

Jeder Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ kann als Linearkombination der Einheitsvektoren geschrieben werden:

$$\vec{v} = v_1\vec{e}_1 + ... + v_n\vec{e}_n$$

$$\Rightarrow A\vec{v} = v_1\vec{u}_1 + ... + v_n\vec{u}_n$$

$A_{m \times n}$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ Basis des $\mathbb{R}^n$

$\vec{u}_1 = A\vec{b}_1, \dots, \vec{u}_n = A\vec{b}_n$ n Bildvektoren

Inputvektor: $\vec{v} = \lambda_1 \vec{b}_1 + \dots + \lambda_n \vec{b}_n$

$\Rightarrow$

Outputvektor: $\vec{u} = A\vec{v} = \lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n$

$$U = A(\mathbb{R}^n) = \{A\vec{v} : \vec{v} \in \mathbb{R}^n\} = \{\lambda_1 \vec{u}_1 + \dots + \lambda_n \vec{u}_n : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in$$

Die Menge U aller möglichen Outputvektoren unter der Wirk
von A entspricht dem von den Bildvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$
aufgespannten Unterraum des $\mathbb{R}^m$.

Die Dimension dieses Unterraums U ist rang(A).