Mathe I INTRO

	+	−
+	+	−
−	−	+

$\mathbb{N}$ natürliche Zahlen

$\mathbb{Z}$ ganze Zahlen

$\mathbb{Q}$ rationale Zahlen

$\mathbb{R}$ reelle Zahlen (rational + irrational ($\sqrt{2}, \ldots$))

↳ unendlicher, nicht-periodischer Dezimalbruch

rational: endlicher Dezimalbruch + unendlicher, periodischer Dezimalbruch

$\frac{x}{0}$ undef.

Potenzen ($\text{Basis}^{\text{Exponent}}$)

$a^0 = 1$ (für $a \neq 0$) $\qquad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

$(ab)^r = a^r b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} = a^r b^{-r}$

Zinseszins

K um p% pro Zeiteinheit t

$$K\left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^t \Rightarrow \text{Wachstumsfaktor} \begin{cases} + \text{Zuwachs} \\ - \text{Abnahme} \end{cases}$$

Algebra

$a a^{-1} = 1$ für $a \neq 0$

$(-a)b = a(-b) = -ab$

$(-a)(-b) = ab$

$ab = ba$

$a(b+c) = ab + ac$

$$\left.\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+b^2+2ab\\ (a-b)^2 &= a^2+b^2-2ab\end{aligned}\right\}\text{Binomische Formeln}$$

$$(a+b)(a-b) = a^2-b^2 \Rightarrow \text{Differenz von Quadraten}$$

Brüche

$\frac{a}{b}$ $a \rightarrow$ Zahler
$b \rightarrow$ Nenner

$$\frac{a\cdot\cancel{c}}{b\cdot\cancel{c}} = \frac{a}{b}$$ $\Rightarrow$ Vereinfachen / Kürzen
($b \neq 0$ und $c \neq 0$)

$$\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b} \qquad -\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} \qquad \frac{a}{c}+\frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$$ $\Rightarrow$ Generalformel, brauche normalerweise Kleinster Gemeinsamer Nenner!

$$a+\frac{b}{c} = \frac{a\cdot c+b}{c}$$

$$a\cdot\frac{b}{c} = \frac{a\cdot b}{c} \qquad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d} = \frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$$

Potenzen mit Brüche als Exponent

$a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a} \qquad a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \qquad a \geq 0$

$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p$

$a^{\frac{p}{q}} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (a^p)^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$

Ungleichungen

$a > b$ und $b > c \Rightarrow a > c$

$a > b$ und $c > 0 \Rightarrow ac > bc$

$a > b$ und $c < 0 \Rightarrow ac < bc$

Wenn beide Seiten mit + multipliziert werden, bleibt Richtung erhalten. Mit − Zahl kehrt die Richtung um.

$a > b$ und $c > d \Rightarrow a+c > b+d$

⚠ bei Umkehrung, Fälle unterscheiden

Doppel-Ungleichungen: $a \leq z$ und $z < b \Rightarrow a \leq z < b$

Intervalle

$]a,b[$	offen	$a < x < b$
$[a,b]$	abgeschlossen	$a \leq x \leq b$
$]a,b]$	halboffen	$a < x \leq b$
$[a,b[$	halboffen	$a \leq x < b$

∞ Unendlich (zb. $[a,\infty[$ $x \geq a$)

Absolutbetrag

$|a| = \begin{cases} a & \text{falls } a \geq 0 \\ -a & \text{falls } a < 0 \end{cases}$

$|x| < a \rightarrow -a < x < a \qquad |x| \leq a \rightarrow -a \leq x \leq a$

Gleichungen

$+ / - / \cdot / \div$ auf beiden Seiten

⚠ Nenner dürfen nicht 0 sein!

Quadratische Gleichungen

$ax^2+bx+c=0 \quad (a\neq 0)$

Generalformel:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad \text{für } b^2-4ac\geq 0 \text{ und } a\neq 0$$

Spezialfälle:

$$ax^2+bx=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{b}{c}x=0 \Leftrightarrow x=0 \text{ oder } x=\frac{-b}{c}$$

$$ax^2+c=0 \Leftrightarrow x^2+\frac{c}{a}=0 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\frac{-c}{a}} \quad \left(\frac{-c}{a}\geq 0\right)$$

Faktorenzerlegung:

Wenn x_1 und x_2 die Lösungen von $ax^2+bx+c=0$ sin

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$$

also wenn $b^2-4ac<0$, Keine Faktorenzerlegung,
bei $b^2-4ac=0$, dann $x_1=x_2$, also $a(x-x_1)^2$

Lineare Gleichungen (mit 2 Unbekannten)

Gleichungssysteme:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 18 \\ 3x - 4y = -7 \end{cases}$$

① Einsetzen: $3x - 4\left(6 - \frac{2x}{3}\right) = -7$

$$3x - 24 + \frac{8x}{3} = -7$$

$$\frac{17x}{3} = 17$$

$$17x = 51$$

$$x = \frac{51}{17} = 3$$

dann wieder: $y = 6 - \frac{2x}{3}$

$$y = 6 - \frac{6}{3}$$

$$y = 6 - 2 = 4$$

② Addition (oder Subtraktion) eines Vielfaches der Gleichungen von einandern zur Elimination einer Variablen

$$\begin{array}{rl} 8x + 12y &= 72 \\ 9x - 12y &= -21 \\ \hline 17x &= 51 \end{array} \Rightarrow x = \frac{51}{17} = 3$$

und y analog zu ①

Nichtlineare Gleichungen

$ab = ac \Leftrightarrow a = 0$ oder $b = c$

⚠ 0 als Losung nicht vergessen!

⚠ $\frac{x}{y} = 0$ wenn $y \neq 0$, x muss 0 sein!

Summennotation

$$\sum_{i=1}^{6} v_i = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 + v_6$$

$$\sum_{i=p}^{q} a_i = a_p + a_{p+1} + \ldots + a_q$$

$i \Rightarrow$ Summationsindex

Regeln für Summen

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i$$

$$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \quad \left(\text{bei } a_i = 1, \sum_{i=1} 1 \text{ ist } n, \text{ also } c \cdot n\right)$$

Gauss-formel: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{1}{2} n(n+1)\right]^2 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2$$

Newtons Binomische Formeln

$$(a+b)^m = a^m + \binom{m}{1} a^{m-1} b + \ldots + \binom{m}{m-1} a b^{m-1} + \binom{m}{m} b^m$$

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m-1)\ldots(m-k+1)}{k!}, \quad \binom{m}{0} = 1$$

$$\binom{m}{1} = m, \quad \binom{m}{m} = 1$$

Koeffizienten $\Rightarrow$ Pascal'sches Dreieck (siehe S 86 Sydsaeter)

Doppelsummen

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

Kommt nicht auf die Reihenfolge der Summation a

Induktions Beweis

$A(n)$ sei eine Aussage für alle $\mathbb{N}$ und es gelte:

a) $A(1)$ ist wahr

b) wenn die Induktionshypothese $A(k)$ wahr is dann ist auch $A(k+1)$ wahr für jedes $k \in \mathbb{N}$

Dann ist $A(n)$ wahr für alle $n \in \mathbb{N}$.