Funktionen einer Variablen

injektiv : $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

surjektiv : $\forall y, \exists x : y = f(x)$

bijektiv : injektiv + surjektiv

Definitions- und Wertebereich $\Rightarrow$ Fallunterscheidungen

bijektive Fkt. $\Rightarrow$ Umkehrfunktion $f^{-1}(y) = x$

Folgen und Reihen

↳ Fkt. mit $D = \{\mathbb{N}\}$ ↳ Summation von Folgen $\sum_{k=1}^{n} a_k$

Grenzwert/Limes $\Rightarrow$ Konvergent / divergent

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{p}{n}\right)^n = e^p$$

geometrische Folge: $a_n = a \cdot q^{n-1}$, $q \neq 1$

geometrische Reihe: $s_n = a \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$, Konvergiert bei $|q| < 1$ mit:

$s = \frac{a}{1-q}$, sonst divergent

Grenzwert einer Fkt

- an einer Stelle $\lim_{x \to x_0} f(x) = g$, von Rechts $\lim_{x \to x_0^+}$, von Links $\lim_{x \to x_0^-}$
- gegen Unendlich $\pm \infty$

$\Rightarrow$ R+L gleich: Grenzwert

R+L ungleich: Pol/Sprungstelle

Stetigkeit einer Fkt.

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Rightarrow \text{stetig!}$$

Differentialrechnung, Ableitung

differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ existiert

$f'(x)$ erste Ableitung, (Marginale Funktionen) $f'(x)$ stetig $\Rightarrow$ $f(x)$ stetig differenzierbar

Gerade Tangente Punkt $P = (x_0, y_0)$ mit $y_0 = f(x_0)$:

$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + y_0$

differenzierbar in x_0 $\Rightarrow$ stetig, aber stetig $\not\Rightarrow$ differenzierb

① **Linearität:** $(af(x) \pm b\,g(x))' = a\,f'(x) \pm b\,g'(x)$

② **Produktregel:** $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x)\,g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

③ **Quotientenregel:** $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\,g(x) - f(x)\,g'(x)}{(g(x))^2}$

④ **Kettenregel:** $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Ableitung Umkehrfunktion (direkt): $f^{-1\,'}(y) = \frac{1}{f'(x)} \Big|_{x = \text{gegen } x \text{ aufgelöstes } y}$

Differential: $df(x_0) = f'(x_0)\,dx$ $\Rightarrow$ lineare Näherung

$$f_{lin}(x_0 + dx) \approx f(x_0) + df(x_0)$$

$$\frac{\text{Relative } \Delta y}{\text{Relative } \Delta x} = \frac{\frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{f(x_0)}}{\frac{\Delta x}{x_0}} = \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{x_0}{f(x_0)}$$

Elastizität: $E_f(x_0) = f'(x_0)\,\frac{x_0}{f(x_0)}$

$|E| > 1$: elastisch

$|E| < 1$: unelastisch

Wachstumsrate: $y = f(t)$, $r(t_0) = \frac{f'(t_0)}{f(t_0)}$, $r(t) = \frac{d}{dt} \ln(f(t))$

Regel von L'Hôpital:

wenn $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ oder $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ $\Rightarrow$ $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Kurvendiskussion:

Nullstellen: $f(x) = 0$, sei $f(x)$ stetig in $[a,b]$, und $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ (oder umgekehrt), dann gibt es mind. 1 Nulls

Symmetrie: gerade, wenn $f(-x) = f(x)$

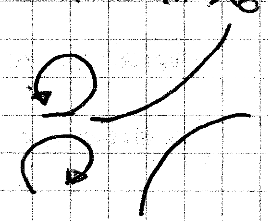
ungerade, wenn $f(-x) = -f(x)$

Monotonie: $f'(x_0)>0 \Rightarrow$ streng Monoton steigend in x_0

$f'(x_0)<0 \Rightarrow$ streng Monoton fallend in x_0

Krümmung: $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ Konvex in x_0

$f''(x_0)<0 \Rightarrow$ Konkav in x_0



Extremstellen: min, max auf Umgebung

$\Rightarrow f'(x_0)=0$ NOTWENDIG

$$x_0 = Max \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)<0 \end{cases}$$

$$x_0 = Min \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x_0)=0 \\ f''(x_0)>0 \end{cases}$$

Wendestelle: Krümmungsverhalten ändert sich!

$$x_0 = WS \Leftrightarrow \begin{cases} f''(x_0)=0 \\ f'''(x_0)\neq 0 \end{cases}$$

($f'(x_0)=0$ gilt auch noch, dann Sattelpunkt)

Taylorsches Polynom $\Rightarrow$ approximation einer funktion

$$P_n^f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)^1+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)$$

$$P_1^f(x)=f_{lin}(x)$$

Funktionen zweier Variablen ($f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

Flächen, $P=(x,y,f(x,y))$, $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}\}$, $W=\{z\in\mathbb{R}\}$

Niveaulinien: $f(x,y)=C$ oder $\varphi(x,y)=0$
(Isoquanten
Indifferenzkurven)

Differentialrechnung:

einer Var.: Steigung der Tangente in jedem Punkt, Ableitung

zwei Var.: Tangentialebene, 2 Tangenten definiert, x und y

$\Rightarrow$ partielle Ableitungen $\Rightarrow$ Steigung dieser 2 Tangenten
(Grenzfunktionen)

$f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$ erster Ordnung

$f_{xx}(x,y)$, $f_{yy}(x,y)$ zweiter Ordnung

$f_{xy}(x,y) == f_{yx}(x,y)$ gemischte

Tangentialebene: $z = f_x(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + z_0$

Totales Differential: $df(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)dx + f_y(x_0,y_0)dy$

$$f(x_0+dx, y_0+dy) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$$

Verallgemeinerte Kettenregel: $F(t) = f(x(t), y(t))$

$$\Rightarrow F'(t) = f_x(x(t),y(t))\cdot x'(t) + f_y(x(t),y(t))\cdot y'(t)$$

Tangente an die Niveaulinien: $y = m(x_0,y_0)\,x + b(x_0,y_0)$

$$m(x_0,y_0) = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)} \Rightarrow \text{Substitutionsrate}$$

$$b(x_0,y_0) = y_0 - m(x_0,y_0)\cdot x_0$$

implizite Differentiation: $h'(x) = m(x,y) = -\frac{\varphi_x(x,y)}{\varphi_y(x,y)} = -\frac{\varphi_x(x,h(x))}{\varphi_y(x,h(x))}$

$(\varphi(x,h(x)) = 0,\ h(x_0) = y_0)$

$\Rightarrow y = h(x)$

partielle Elastizität

$$E_{f,x}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,\frac{x_0}{f(x_0,y_0)}$$

$$E_{f,y}(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0)\,\frac{y_0}{f(x_0,y_0)}$$

Extremstellen, ohne Nebenbedingung

$$\Rightarrow f_x(x_0,y_0)=0 \quad \text{und} \quad f_y(x_0,y_0)=0 \qquad \text{NOTWENDIG}$$

$$(x_0,y_0)=\text{Max} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \text{ und } f_y(x_0,y_0)=0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)<0 \text{ und } f_{yy}(x_0,y_0)<0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0 \end{cases}$$

$$(x_0,y_0)=\text{Min} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \text{ und } f_y(x_0,y_0)=0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)>0 \text{ und } f_{yy}(x_0,y_0)>0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)>0 \end{cases}$$

$$(x_0,y_0)=\underset{\text{(Sattelpunkt)}}{\text{SP}} \Leftrightarrow \begin{cases} f_x(x_0,y_0)=0 \text{ und } f_y(x_0,y_0)=0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)<0 \end{cases}$$

Hesse-Matrix:

$$\nabla^2 f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{xy}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

$$\det(\nabla^2 f(x_0,y_0)) = f_{xx}(x_0,y_0)\cdot f_{yy}(x_0,y_0)-f_{xy}^2(x_0,y_0)$$

Extremstellen, mit Nebenbedingung:

x und y sind durch "Nebenbedingung" verbunden!

$\varphi(x,y)=0$ implizite Form

$$-\frac{\varphi_x(x_0,y_0)}{\varphi_y(x_0,y_0)} = -\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}$$

Methode der Lagrange Multiplikatoren:

⇒ nur mögliche Kandidaten!

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot \varphi(x,y)$$

↳ Lagrange Multiplikator

$$\begin{cases} F_x(x,y,\lambda) = f_x(x,y) + \lambda \cdot \varphi_x(x,y) = 0 \\ F_y(x,y,\lambda) = f_y(x,y) + \lambda \cdot \varphi_y(x,y) = 0 \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

Gleichungssystem lösen, λ schnell eliminieren!

Gradient:

$$\vec{\nabla} f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} f_x(x_0,y_0) \\ f_y(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

umschreibung des Differential: $df(x_0,y_0) = \vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot d\vec{x}$

$\vec{\nabla} f(x_0,y_0) \cdot dx = 0$

⇒ Gradient senkrecht zur Niveaulinie, zeigt in Richtung der grössten Zunahme der Fkt.

Homogene Funktionen:

Skalenerträge ⇒ Grad einer Homogenen Fkt.

Homogen mit Grad $s \in \mathbb{R}$, falls: $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^s f(x,y)$

Eulersche Relation:

Jede Homogene mit Grad s erfüllt:

$$s \cdot f(x,y) = x \cdot f_x(x,y) + y \cdot f_y(x,y)$$